24/11/16

Ομάδα G και $a \in G$

$Z(a) = \{g \mid ga = ag \quad g \in G\}$ κεντροποιητής

$\bar{a} = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$

$|\bar{a}| = [G : Z(a)]$

$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} [G : Z(a_i)]$

$|a_i| \geq 2$

• Αν $H \leq G$ και $[G : H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft G$: κανονική

$A_n \triangleleft S_n$

Απλές ομάδες, όταν οι μόνες κανονικές υποομάδες είναι η τετριμμένη και ο εαυτός της

Παρ

A_n : απλή $n \geq 5$

• A_2 $\quad S_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

• A_3 $\quad |S_3| = 6$

$S_3 = \{1, (1,2,3), (1,3,2), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

$A_3 = \langle (1,2,3) \rangle$

$|S_4| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$|A_4| = 12$

$A_4 = \{1, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (2,4)$
$(1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)\}$

$H = \{1, (1,2)(3,4), (1,3), (24), (1,4), (2,3)\} \leq A_4$

$A_4 \triangleleft S_4$

$V \cup \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leq A_4 \trianglelefteq S_4$

Ως μια ιδιο αυτή σκέψη, σκέφτομαι αν μέσα στην A_4 υπάρχει άλλη υποομάδα τάξης 4 στην A_4. Είναι μοναδική, άρα είναι κανονική.

V: μοναδική τάξης 4 στην $A_4 \Rightarrow V \trianglelefteq A_4$

$V \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$1 \triangleleft V \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$

$V/1 \simeq V \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$A_4/V \simeq \mathbb{Z}_3 \quad S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

Ομάδα Πηλίκο

$H \triangleleft G$ Σύμπλοκα $\{Hg \mid g \in G\}$

Ορίζουμε την πράξη

$$(Hg) \odot (Hg') = Hgg'$$

Πράξη καλά ορισμένη

$$Hg_1 = Hg \Leftrightarrow g g_1' \in H$$

$$Hg' = Hg_1' \Leftrightarrow g'(g_1')^{-1} \in H$$

Ισχύει ότι

$$Hgg' = Hg_1 g_1' \ ?$$

Έχουμε:

$Hg = \{hg \mid h \in H\}$

$h_0 \in H$

$H(h_0 g) = \{h(h_0 g) / h \in H\}$

Θέλω $Hgg' = Hg_1 g_1' \Leftrightarrow (gg')(g_1 g_1')^{-1} \in H$

Έχουμε ότι:

$$g g_1^{-1} \in Y$$
$$g'(g_1')^{-1} \in Y$$

$$g g' (g_1')^{-1} g_1^{-1}$$

$$g g_1^{-1} \in Y$$
$$g'(g_1')^{-1} \in Y$$
$$g h g_1^{-1}$$

Έχουμε:

$$\left(\underbrace{g h g^{-1}}_{\in Y}\ \underbrace{g g_1^{-1}}_{\in Y}\right) \in Y$$

γιατί

Y κανονική

Η πράξη μεταξύ των συμπλόκων $\{Yg \mid g \in Y\}$ είναι καλά ορισμένη και το σύνολο των συμπλόκων* συμβολίζεται G/Y και αποτελεί την ομάδα πηλίκο.

Παράδειγμα

$$(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^*$$
$$x \mapsto \cos 2\pi x + i\sin(2\pi x)$$
$$\|\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x\| = 1$$

$$\operatorname{Im}\Phi \subseteq S^1 = \{z / z \in \mathbb{C} \text{ και } \|z\| = 1\}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} S^1 \leq \mathbb{C}^*$$

- Ομομορφισμός

$$\Phi(x+x') = \cos 2\pi(x+x') + i\sin 2\pi(x+x')$$
$$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi x' + i\sin 2\pi x')$$

$$\Phi(x) = 1 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi \cdot \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

• Εκθετική μορφή $\cos 2\pi t + i\sin 2\pi t$
για κάθε $k+t$ ταυτίζεται με το $\cos 2\pi t$.

$$\cos 2\pi\tau = \cos 2\pi = 1 \quad \text{και} \quad \sin 2\pi\tau = \sin 2\pi = 0$$

$\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$ (όλες οι υποομάδες κανονικές)

6 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$$
$$\{\tau + \mathbb{Z} \,/\, 0 \le \tau < 1\}$$

Θεώρημα

Έστω πεπερασμένη αβελιανή και p πρώτος διαιρέτης της τάξης. Τότε υπάρχει στοιχείο τάξης p.
$\Rightarrow \exists\ Y \le G$ με $|Y| = p$

Απόδειξη

Επαγωγή στην τάξη της G

$|G| = 2, 3, 4, 5, 6$

$\mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_3 \quad \mathbb{Z}_4 \ (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2) \quad \mathbb{Z}_5 \quad \mathbb{Z}_6$

Υποθέτω ότι ισχύει μέχρι το $k-1$
Θα το δείξουμε για k
Αν η ομάδα είναι κυκλική, ισχύει
Έστω
$g \in G$, $|g| \mid |G|$
Αν $|g| = p$, τότε ισχύει.

Έστω ότι $|g| \neq p$.

Θέτουμε $Y = \langle g \rangle$
$Y \triangleleft G \Rightarrow$ ορίζεται το $G/Y \Rightarrow$

$|G/Y| < k$ και επειδή

$p \nmid |Y| \Rightarrow p \,/\, |G/Y| \Rightarrow$

Υπαρχει στοιχειο ταξης p στην G/Y
Ας ειναι αυτό

$$Ya \in G/Y$$

$$(Ya)^p = Y \Rightarrow a^p \in Y$$

$$o(a^p) \,/\, |Y| \Rightarrow o(a^p) = k$$

Αρα

$$a^{pk} = e \Rightarrow o(a^k) = p \qquad a^k \in G$$

<u>Θεώρημα</u>

Εστω G πεπερασμενη ομαδα με εναν πρώτο p να διαιρεί την τάξη της. Τότε υπαρχει στοιχειο τάξης p.

<u>Απόδειξη</u>

$$|G| = pk \qquad | \text{δηλαδή } p \,|\, |G|$$

Με επαγωγη στο k

$k=1$ ισχυει.

Υποθέτουμε οτι ισχυει μέχρι $n-1$

Θα το δείξουμε για n

Έστω Y υποομαδα της G.

1) Αν ο $p \,/\, |Y|$ από επαγωγή $\Rightarrow$ υπαρχει στοιχειο τάξης p.

2) Δεν εχει η G γνήσιες υποομαδες οι οποίες διαιρούνται από p.

$$p \nmid |Y| \Rightarrow p \,/\, |G| \Rightarrow p \,/\, [G:Y]$$

Δεν γνωρίζουμε αν φαίνεται το πηλίκο G/Y τώρα.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{1}^{l} [G : Z(a_i)]$$

$$Z(a_i) < G \quad \forall i = 1, \dots, l$$

και

$$p \mid |G| \;, \; [G : Z(a_i)] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} p \mid |Z(G)| \\ Z(G) \text{ αβελιανή} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, y \le Z(G)$$

με $|y| = p$

<u>Ομομορφισμοί</u>

$\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός $\Leftrightarrow$

$$\varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \odot_{G'} \varphi(b) \quad \forall a, b \in G$$

φ: 1-1 μονομορφισμός
φ: επί επιμορφισμός
φ: 1-1 και επί: ισομορφισμός $G \cong G'$

<u>Ορισμός</u>

Αν $\varphi: G \to G$ ισομορφισμός τότε θα καλείται αυτομορφισμός. Το σύνολο των αυτομορφισμών συμβολίζεται με $Aut(G)$

<u>Πρόταση</u>

$Aut(G)$ είναι ομάδα με τη σύνθεση

<u>Παραδείγματα</u>

1) Ταυτοτική
2) Τετριμμένη $\varphi: G \to G'$ με τύπο $\varphi(a) = 1_{G'}$

Το σύνολο $End(G) = \{\varphi : G \to G$ ομομορφισμός$\}$
Υπάρχει πράξη με τη σύνθεση
$Aut(G) \subseteq End(G)$ μονοειδές

Δεν είναι ομάδα γιατί δεν έχει αντίστροφο το τετριμμένο.

Παράδειγμα

1) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = kn$ ομομορφισμοί

2) $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^+$
$r \mapsto e^r$

3) $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ ομομορφισμός
$A \mapsto \det A$.

πχ
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$
$\varphi(\sigma)$ → 0 : άρτια, → 1 : περιττή.

$Aut(G)$

Ορισμός
Έστω G ομάδα και $Aut(G)$ η ομάδα αυτομορφισμών. Το υποσύνολο $\{\varphi_a : G \to G \,/\, a \in G$ με τύπο $\varphi_a(b) = aba^{-1}\}$ καλείται το σύνολο των εσωτερικών ισομορφισμών.

Πρόταση
$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$

Απόδειξη

- Ομομορφισμός

$$\varphi_a(b\gamma) = ab\gamma a^{-1}$$
$$\varphi_a(b)\,\varphi_a(\gamma) = aba^{-1}a\gamma a^{-1}$$

- Μονομορφισμός

$$\varphi_a(b) = \varphi_a(\gamma) \Leftrightarrow aba^{-1} = a\gamma a^{-1} \Leftrightarrow b=\gamma$$

- Επιμορφισμός

$\gamma \in G$, βρες b με $\varphi(b)=\gamma$

$aba^{-1}=\gamma \Leftrightarrow b = a^{-1}\gamma a$

Πρέπει νδο $Inn(G) \leq Aut(G)$ (Θ.ν.δ.ο. είναι υποομάδα)

$$\varphi_a \cdot \varphi_b(g) = \varphi_\gamma(g) \quad \forall g \in G$$

$$\varphi_a(bgb^{-1}) = a(bgb^{-1})a^{-1} = (ab)g(ab)^{-1} = \varphi_{ab}(g)$$

Αντίστροφος του

$$\varphi_a : \varphi_a^{-1}$$

$$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$$

Αν $\varphi \in Aut(G)$ και $\varphi_a \in Inn(G) \Rightarrow$
$\varphi\varphi_a\varphi^{-1} \in Inn(G)$

$$\varphi(\varphi_a(\varphi^{-1}(g))) = \varphi(a\varphi^{-1}(g)a^{-1}) =$$

$$\varphi(a)\cancel{\varphi\varphi^{-1}}(g)\varphi(a^{-1}) = \varphi_{\varphi(a)}(g) \in Inn(G)$$

Άρα κανονική

Παράδειγμα

1) $Aut\,\mathbb{Z}_p$, p πρώτος

$\varphi: \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{Z}_p$ αλλ.

$\mathbb{Z}_p$ έχει $\varphi(p)$ γεννήτορες $p-1$

$End(\mathbb{Z}_p)$

Το σύνολο των γεννητόρων είναι κυκλική ομάδα με το γινόμενο.

Άρα

$Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$

πχ

$\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$

$[1] \rightarrow [a] \neq [0]$

$2 = 1+1 \rightarrow a+a = 2a$

$k \mapsto ka \bmod p$.

Ιδιότητες Ομομορφισμών

$\varphi: G \rightarrow G'$

1) $\varphi(1_G) = 1_{G'}$

2) Η τάξη του $\varphi(a)$ διαιρεί την τάξη a

$o(\varphi(a)) / o(a) \quad \forall a \in G$

3) Αν $\varphi \cong$ τότε $|G| = |G'|$ και $o(\varphi(a)) = o(a)$ $\forall a \in G$

Σχέσεις υποομάδων μέσω ομομορφισμού $\varphi: G \rightarrow G'$

1) $ker\varphi = \{ a / \varphi(a) = 1_{G'} , a \in G \}$

είναι κανονική υποομάδα

2) $Im\varphi = \{ \varphi(a) / a \in G \} \leq G'$

3) Αν $H \leq G$ τότε $\varphi(H) \leq G'$

4) Αν $W \leq G'$ τότε $\varphi^{-1}(W) \leq G$

$$\varphi^{-1}(W) = \{a \,/\, \varphi(a) \in W\}$$

5) Αν $W \trianglelefteq G$ τότε $\varphi^{-1}(W) \trianglelefteq O$

6) Αν φ: επιμορφισμός και $Y \trianglelefteq O$, τότε $\varphi(Y) \trianglelefteq G$

__Παράδειγμα__

$\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+ \qquad r \mapsto e^r$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^+$

Έστω $\varphi: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+ \cong \exists a \in \mathbb{Q}$ με $\varphi(a) = 3$

$\varphi(a/2 + a/2) = 3$

$\overset{\text{δηλ.}}{\Rightarrow} (\varphi(a/2))^2 = 3 \qquad \varphi(a/2)$ ρητός $\Rightarrow$ αδύνατο

__Θεώρημα Cayley__

Έστω O ομάδα και S_O η συμμετρική ομάδα στο σύνολο O. Τότε υπάρχει υποομάδα της S_O ισόμορφη με την O.

__Απόδειξη__

$S_O = \{$όλες οι 1-1 επί απεικονίσεις $: O \to O\}$

$\varphi: O \to S_O$

Αυτό σημαίνει ότι $\forall a \in O$ η $\varphi(a): O \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} O$

$\varphi(a)(b) = ab$

$\varphi(a)(b) = \varphi(a)(\gamma) \Rightarrow ab = a\gamma \Leftrightarrow b = \gamma$.

$$\varphi(a)(\varphi(b)(\gamma)) = \varphi(a)(b\gamma) = ab\gamma$$

Αν $\varphi(a) = 1$ στην S_O τότε $a = 1_O$

$\varphi(a)(b) = 1_{\text{ταυτοτική}}(b) = b \quad \forall b \in O$

$ab = b$

$a 1_O = 1_O \Rightarrow a = 1_O$

Άρα $\varphi(O) \leq S_O$ και $\varphi(O) \cong O$

Πρόταση (Γενίκευση του Θεωρήματος Cayley)

Έστω $Y \leq G$ και X το σύνολο των συμπλόκων ως προς Y: $X = \{Ya / a \in G\}$
Υπάρχει κανονική υποομάδα της G με $W \leq Y$ και η ομάδα πηλίκο G/W είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα της S_X

Απόδειξη

Ορίζουμε $\varphi: G \to S_X$ με τρόπο $\varphi(a)$ να είναι μετάθεση στην S_X $\forall a \in G$.

$$\varphi_{(a)}(Yg) = Yga^{-1}$$

Η φ είναι ομομορφισμός

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad \text{σύνθεση}$$

$$\varphi(ab)(Yg) = Yg(ab)^{-1}$$

$$Ygb^{-1}a^{-1} = \varphi(a)(Ygb^{-1}) = \varphi(a)(\varphi(b)(Yg))$$

Ισχύει

Βρίσκουμε τον πυρήνα.

$$\varphi(a) = 1_{S_X}$$

$$\varphi(a)(Yg) \Rightarrow Yga^{-1} = Yg \quad \forall Yg \in X$$

Θέλω

$$1_{S_X}(Yg) = Yg$$

Ισχύει για το $Y \Rightarrow Ya^{-1} = Y \Rightarrow a \in Y$.

$$\varphi(a) = 1_{S_X} \Leftrightarrow a \in \ker\varphi \Rightarrow a \in Y \Rightarrow \ker\varphi \leq Y$$

Στην ουσία εγώ ορίζω τον πυρήνα για να μπορούν να ισχύουν τα υπόλοιπα

Έστω $\ker f = W \Rightarrow W \lhd G$ και $W \leq Y$

Άρα

με το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών $\Rightarrow$

$$G/\ker g \cong g(G) \leq S_X \iff$$

$$G/W \cong g(G) \leq S_X$$

$$W \leq Y$$

<u>Homework</u>

Κανονικές Υποομάδες:

2, 4, 6, 8, 10, 13, 18